Okruhy k magisterské státní závěrečné zkoušce

Matematika

Student prokazuje, že

- má přehled o základních partiích matematické analýzy, algebry, geometrie a diskrétní matematiky v rozsahu bakalářské státní zkoušky
- má přehled o odborné části matematiky, kterou studoval v navazujícím magisterském studiu v rámci povinně volitelných předmětů Úvod do funkcionální analýzy, Diferenciální rovnice, Matematická analýza IV, Geometrie II, a Úvod do analýzy v komplexním oboru. Z těchto předmětů si vybere dva, které nahlásí studijnímu oddělení při přihlášení se ke SZZ.

Úvod do funkcionální analýzy

1. Základní pojmy teorie Lebesgueovy míry – vnější míra, měřitelné množiny, Lebesgueova míra, měřitelné funkce.
2. Lebesgův integrál – definice Lebesgueova integrálu, základní vlastnosti, věty o konvergenci.
3. Srovnání Newtonova, Riemannova a Lebesgueova integrálu. Příklady funkce, pro které existuje Riemannův integrál, ale neexistuje Newtonův integrál, existuje Lebesgueův integrál, ale neexistuje Riemannův integrál, existuje Newtonův integrál, ale neexistuje Lebesgueův integrál apod.
4. Metrické prostory – metrika, její vlastnosti, metrický prostor, příklady, úplný metrický prostor.
5. Normované lineární prostory – norma, vlastnosti normy, příklady normovaných lineárních prostorů, podprostory.
6. Lineární operátor, spojitost, norma operátoru. Banachova věta o pevném bodě.
7. Hilbertovy prostory – skalární součin, vlastnosti, unitární prostor, ortogonalita, podprostory, projektor, Rieszova věta.

Diferenciální rovnice

1. Definice řešení diferenciální rovnice v $\mathbb{R}$, metoda řešení pomocí separace proměnných, lineární diferenciální rovnice, řešení homogenní a nehomogenní úlohy (metoda variace konstant).
2. Lineární diferenciální rovnice n-tého řádu, fundamentální systém řešení, prostor řešení jako lineární vektorový prostor, nehomogenní úloha.
3. Soustavy lineárních diferenciálních rovnic, fundamentální systém řešení, prostor řešení jako lineární vektorový prostor, metoda variace konstant.
4. Soustavy lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty. Řešení, exponenciální matice.

5. Nelineární diferenciální rovnice. Pevný bod, isokliny. Vyšetřování lokální stability pevného bodu linearizací soustavy. Ljapunovská funkce.

6. Úloha na vlastní čísla pro obyčejnou diferenciální rovnici druhého řádu pro různé typy okrajových podmínek. Vlastní čísla a vlastní funkce.

7. Fourierova metoda řešení okrajových úloh. Fourierova řada vzhledem k systému vlastních funkcí pro okrajové úlohy druhého řádu. Postačující podmínky pro konvergenci Fourierovy řady.

8. Rovnice vedení tepla. Řešení na přímce. Difuzní jádro. Řešení pro skokovou a obecnou počáteční podmínku. Řešení okrajové úlohy pomocí Fourierovy metody.

9. Vlnová rovnice. Řešení počáteční úlohy na přímce. Řešení okrajové úlohy pomocí Fourierovy metody.

Matematická analýza IV

1. Vektorové funkce: definice, příklady, limita, spojitost, diferencovatelnost, integrovatelnost.

2. Křivky: křivka a oblouk, parametrické vyjádření oblouku v rovině a prostoru (např. přímka, kružnice, šroubovice), délka křivky, tečný a normálový vektor ke křivce, křivost.

3. Vektorová pole: definice a příklady, konzervativní vektorové pole a potenciální funkce, divergence a rotace.

4. Křivkový integrál 1. druhu: motivace odvození, definice, aplikace.

5. Křivkový integrál 2. druhu: motivace odvození, definice, aplikace, nezávislost na cestě, Greenova věta.

6. Plochy: definice a příklady, parametrické vyjádření plochy, hladká plocha, tečná rovina a normála k parametrizované ploše, obsah parametrizované plochy, orientovatelnost plochy.

7. Plošný integrál 1. druhu: motivace odvození, definice, aplikace.

8. Plošný integrál 2. druhu: motivace odvození, definice, aplikace, Gaussova věta.

9. Stokesova věta, Greenova věta, Gaussova věta a jejich vztah.

Geometrie II

1. Komplexní vektorové prostory, komplexní rozšíření reálného vektorového prostoru. Lineární nezávislost vektorů v reálném vektorovém prostoru a jeho komplexním rozšíření a jejich báze. Reálný podprostor komplexního rozšíření vektorového prostoru, nalezení maximálního reálného podprostoru.

2. Projektivní prostory, aritmetická a geometrická báze projektivního prostoru. Přechod od projektivní roviny k afinní rovině, projektivní rozšíření afinní roviny a příslušný vztah vzájemně určené geometrické báze projektivní roviny a repéru afinní roviny.

3. Projektivní vlastnosti kuželoseček: Rovnice kuželosečky v projektivní rovině a hodnost kuželosečky. Polární sdruženost bodů vzhledem ke kuželosečce, pojem poláry a tečny, singulární body kuželosečky. Diagonální (projektivní) tvar kuželosečky a využití diagonalizace kvadratických forem k jeho nalezení.

4. Afinní vlastnosti kuželoseček: Rovnice kuželosečky v afinní rovině a jejím projektivním rozšíření. Vlastní a nevlastní body kuželosečky, středy a asymptoty kuželosečky. Kanonický (afinní) tvar kuželosečky a jeho nalezení pomocí převodu na druhou mocninu dvojčlenu.

5. Metrické vlastnosti kuželoseček: Rovnice kuželosečky v Euklidovské rovině. Hlavní směry a hlavní čísla kuželosečky, osa a vrchol kuželosečky. Význam středů a hlavních směrů pro nalezení kanonického (metrického) tvaru kuželosečky. Základní principy metrické klasifikace kuželoseček pomocí metody invariantů.

Úvod do analýzy v komplexním oboru

1. Komplexní čísla a jejich tvary, práce s nimi, rozšířená Gaussova rovina.

2. Komplexní funkce komplexní proměnné, důležité příklady funkcí (exponenciální, goniometrické, hyperbolická, logaritmická, odmocninná) a jejich vlastnosti a rozdíly od reálných funkcích reálné proměnné.

3. Derivace komplexní funkce komplexní proměnné, pojem holomorfní funkce, souvislost derivace a spojitosti, Cauchy-Riemmanovy podmínky.

4. Integrál komplexní funkce po uzavřené křivce, Cauchyho věta(y), Cauchyho integrální vzorce včetně vysvětlujícího přikladu, pojem primitivní funkce a otázka nezávislosti integrálu na cestě.

5. Číselné řady, posloupnosti a řady funkcí a kritéria konvergence, mocninné řady, Taylorovy řady, Laurentovy řady včetně vysvětlujícího příkladu.

Didaktika matematiky

Student prokazuje, že

- je schopen aplikovat matematickou teorii při metodickém výkladu a řešení úloh středoškolského učiva
- se orientuje v koncepci výuky matematiky na příslušném typu školy (gymnázium, odborné školy)
- zvládne připravit a vést výuku ve třídě se studenty s rozdílnou úrovní matematického talentu

1. Základy matematické logiky
2. Číselné obory
3. Algebraické a nealgebraické rovnice, nerovnice a jejich soustavy
4. Množiny a jejich vlastnosti (množina, kartézský součin, relace, zobrazení, funkce, posloupnost)
5. Grafy algebraických a nealgebraických funkcí (funkce mocninné, exponenciální, logaritmické)
6. Goniometrie a trigonometrie
7. Kombinatorika, pravděpodobnost a statistika
8. Posloupnosti a řady
9. Planimetrie (rovinné útvary, konstrukční úlohy, zobrazení)
10. Stereometrie (polohové a metrické úlohy)
11. Analytická geometrie lineárních útvarů
12. Analytická geometrie kuželoseček

Pedagogika a psychologie

Student skládá SZZ z tohoto předmětu na katedře Pedagogiky a psychologie, Pedagogická fakulta JU.